ÉCOLE NAVALE

Concours 1987

Deuxième composition de Mathématiques

Soit E l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\mathscr{E}$ l'espace affine associé. Pour des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, on note $\|\vec{u}\|$ la norme euclidienne de $\vec{u}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans toute la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 et $X = \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$ est un ensemble de n points fixés et non alignés de $\mathscr{E}$.

Si M est un point de $\mathscr{E}$, on pose :

$$d(M) = \sum_{i=1}^{n} \| \overrightarrow{MP_i} \|$$

et lorsque M n'appartient pas à X, on définit :

$$\overrightarrow{V_M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MP_i}}{\| \overrightarrow{MP_i} \|}$$

PARTIE I

1. — Étant donné trois points M, N et P de $\mathscr{E}$, montrer l'inégalité :

$$\| \overrightarrow{NP} \| - \| \overrightarrow{MP} \| \leqslant \langle \overrightarrow{NM}, \frac{\overrightarrow{NP}}{\| \overrightarrow{NP} \|} \rangle$$

2. — Montrer que s'il existe un point N de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{V_N} = \vec{0}$, alors d est minimale au point N.

3. — S'il existe $k \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$ tel que

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\overrightarrow{P_k P_i}}{\| \overrightarrow{P_k P_i} \|} \right\| \leqslant 1,$$

montrer que d est minimale au point P_k.

4. — Si N est le milieu d'un segment M_0M_1, établir l'inégalité :

$$2d(N) \leqslant d(M_0) + d(M_1)$$

En déduire l'unicité du point où d est minimale, si un tel point existe.

5. — Trouver les points où d est minimale dans les cas suivants.

(a) $n = 3$ et X est constitué des trois sommets d'un triangle équilatéral.

(b) $n = 3$ et X est constitué des trois sommets d'un triangle dont l'un des angles est compris entre $\frac{2}{3}\pi$ et π.

(c) $n = 8$ et X est constitué des huit sommets d'un cube.

(d) $n = 4$ et $X = \{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$ où les points $(P_i)_{i=1,2,3,4}$ ont pour coordonnées dans une base orthonormée de $\mathscr{E}$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) vérifient : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y \leqslant -1 \end{cases}$

[On pourra calculer $\| \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_1P_4} \|$]

Tournez la page S. V. P.

PARTIE II

Dans cette partie, M_0 et M_1 désignent deux points fixés de $\mathscr{E}$ tels que le segment M_0M_1 ne contienne aucun point de X.

Pour $t \in [0, 1]$, M_t désigne le point de $\mathscr{E}$ défini par : $\overrightarrow{M_0M_t} = t\overrightarrow{M_0M_1}$ et on pose $f(t) = d(M_t)$.

1. — *(a)* Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $f'(t) = -\langle \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{V_{M_t}} \rangle$.

(b) Établir que si M_1 est le barycentre des points $(P_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ affectés des coefficients $\left(\dfrac{1}{\| \overrightarrow{M_0P_i} \|} \right)_{i=1,2,\ldots,n}$ et si $M_1 \neq M_0$, alors $f'(0) < 0$.

2. — *(a)* En revenant au cas général, montrer que f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $f''(t) = Q_{M_t}(\overrightarrow{M_0M_1})$ où, pour tout point $M \in \mathscr{E}$, Q_M est une forme quadratique sur E, définie par :

$$\forall\, \vec{v} \in E,\ Q_M(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\vec{v}\|^2}{\| \overrightarrow{MP_i} \|} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\langle \overrightarrow{MP_i}, \vec{v} \rangle)^2}{\| \overrightarrow{MP_i} \|^3}$$

(b) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{E}$ et pour tout $\vec{v} \in E$,

$$Q_M(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\| \overrightarrow{MP_i} \wedge \vec{v} \|^2}{\| \overrightarrow{MP_i} \|^3}$$

En déduire que pour $M \in \mathscr{E}$ fixé, Q_M est définie positive sur E.

(c) Établir que pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe $\alpha_M > 0$ tel que pour tout $\vec{v} \in E$, on ait : $Q_M(\vec{v}) \geqslant \alpha_M \| \vec{v} \|^2$

3. — Dans cette question, on cherche à minorer α_M. Pour cela, on désigne par G le barycentre des points $(P_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ affectés des coefficients +1 et on note $\delta(P, \Delta)$ la distance d'un point P à une droite Δ. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de E, $\Delta(M, \vec{u})$ désigne la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}$. Le moment d'inertie $I_M(\vec{u})$ du système X par rapport à la droite $\Delta(M, \vec{u})$ est défini par :

$$I_M(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} [\delta(P_i, \Delta(M, \vec{u}))]^2$$

(a) Montrer que quels que soient $M \in \mathscr{E}$ et $\vec{u}$ vecteur unitaire de E, on a :

$$I_M(\vec{u}) \geqslant I_G(\vec{u})$$

(b) Par un raisonnement analogue à celui de la question 2. *(c)*, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, \vec{u} \in E \quad \text{avec} \quad \| \vec{u} \| = 1 \quad , \quad I_G(\vec{u}) \geqslant \alpha$$

(c) En déduire que pour tout $M \in \mathscr{E}$ et $\vec{v} \in E$, on a l'inégalité : $Q_M(\vec{v}) \geqslant \dfrac{\alpha \| \vec{v} \|^2}{|d(M)|^3}$.

PARTIE III

L'espace $\mathscr{E}$ étant muni d'un repère orthonormé $\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ M_t désigne, dans cette partie, le point courant d'une courbe paramétrée Γ d'équation $\overrightarrow{OM_t} = \vec{F}(t)$ où F est une fonction de classe C^2 de $[0, 1]$ dans E. Comme précédemment, on pose pour $t \in [0, 1]$:

$$f(t) = d(M_t) = \sum_{i=1}^{n} \| \overrightarrow{M_tP_i} \|$$

On suppose de plus que Γ ne contient aucun point de X.

1. — Montrer que si P est un point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas à Γ, la fonction $t \longrightarrow \| \overrightarrow{PM_t} \|$ est de classe C^2 et calculer ses dérivées première et seconde.

2. — En déduire que f est de classe C^2 sur $[0, 1]$. Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Donner une expression aussi simple que possible de ces applications en fonction des vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ du repère de Frénet de Γ au point M_t.

3. — Calculer $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ dans le cas où $X = \{ O \}$ et où Γ est définie par :

$$\begin{cases} x = \cos 2\pi t \sin 4\pi t \\ y = \sin 2\pi t \sin 4\pi t \\ z = \cos 4\pi t \end{cases} \qquad \text{pour } t \in [0, 1]$$

• • •
•